# Módulo 05
# Aritmética de Punto Flotante (Pt. 1)


Organización de Computadoras
Depto. Cs. e Ing. de la Comp.
Universidad Nacional del Sur

# Copyright


- Copyright © **2011-2024** A. G. Stankevicius
- Se asegura la libertad para copiar, distribuir y modificar este documento de acuerdo a los términos de la **GNU** Free Documentation License, Versión 1.2 o cualquiera posterior publicada por la Free Software Foundation, sin secciones invariantes ni textos de cubierta delantera o trasera
- Una copia de esta licencia está siempre disponible en la página **http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html**
- La versión transparente de este documento puede ser obtenida de la siguiente dirección:

**http://cs.uns.edu.ar/~ags/teaching**


# Contenidos

- Inconvenientes con la representación **FXP**
- Un problema con el escalamiento
- Formatos para la representación **FLP**
- Concepto de orden de magnitud cero (**OMZ**)
- Situaciones especiales a contemplar
- Operaciones aritméticas básicas

# Aritmética de punto fijo

- La aritmética de punto fijo (**FXP**) es apropiada para representar números de base pequeña con órdenes de magnitud acotados
  - Por caso, operando con **32** bits de precisión, el rango a manejar esta acotado por $\pm(2^{31}-1)$, lo cual corresponde en base **10** a $\pm(10^{10})$
- No obstante, este rango es inadecuado en un contexto ingenieril o para las aplicaciones científicas, donde se manejan magnitudes más grandes y también más pequeñas

# Aritmética de punto flotante

- Una alternativa superadora consiste en hacer uso de la notación científica, también conocida como de punto flotante (**FLP**)
- Un cierto número real **f** se denota como el producto entre una mantisa **m** y un exponente **e**, de la siguiente forma:

$$f = m \times b^e$$

  - Tanto **m** como **e** son números signados expresados en una cierta base, mientras que **b** es un entero positivo que denota la base de la representación

# Aritmética de punto flotante

- Volviendo al ejemplo anterior, en caso de contar con **32** bits de precisión, se deben asignar estos bits para representar tanto a **m** como a **e**
  - Nótese que **b** no es almacenado, su valor se asume, queda implícito una vez acordada la representación de punto flotante a ser empleada
  - Una posibilidad consiste en reservar por caso los **22** bits más a la izquierda para **m** y los restantes **10** bits para **e**, haciendo uso de una base implicada **b = 2**

# Aritmética de punto flotante

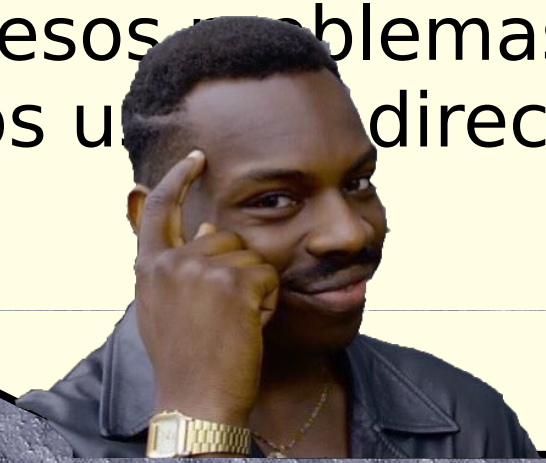
- ¿Habrá mejorado el rango al hacer uso de esta representación de **FLP** en lugar de **FXP**?
  - Recordemos, con **32** bits **FXP** permite representar números enteros de unos 10 dígitos en base **10**.
  - En cambio, en **FLP**, codificando el exponente por caso en **SM** permite representar número de unos 500 dígitos en base **2**.
  - Es decir, números de unos 150 dígitos en base **10**

# Aritmética de punto flotante

- Por lo general, la mantisa **m** puede asumir cualquiera de los tres sistemas vistos para punto fijo
- Como se puede apreciar, el punto en la mantisa flota a partir de la magnitud del exponente
  - Es por esta razón que a esta notación se la refiere como de “punto flotante” (floating point)
- Para el caso del exponente **e**, también se puede usar cualquiera de los sistemas vistos o bien hacer uso de alguno de propósito específico

# Aritmética de punto flotante

- El hardware para operar en **FLP** difiere en gran medida del que se usa para operar en **FXP**
  - Más adelante al repasar los algoritmos para operar en punto flotante está diferencia se hará evidente
  - Es decir, las computadoras que permitan operar en **FLP** serán necesariamente más costosas
- Ahora bien, ¿no sería más razonable intentar resolver esos problemas ingenieriles y científicos usando directamente punto fijo?



# Inconvenientes con FXP

- Inicialmente las primeras computadoras hacían uso exclusivo de aritmética **FXP**
  - Al realizar cálculos científicos, se redondeaban las magnitudes con frecuencia a fin de mantener acotado el número de dígitos significativos
- En estas aplicaciones es importe resolver correctamente con las cuestiones relativas al rango, a la precisión y al nivel de significancia de los valores representados

# Inconvenientes con FXP

- Esas primeras computadoras hacían un uso intensivo del intervalo unitario **[-1, +1]**
  - La idea es que cuando la magnitud de un número se torne muy grande o muy pequeña durante el cómputo, el programador sea el responsable de seguir la posición de la coma en los resultados intermedios
  - Los fuera de rango se manejaban usualmente vía escalamiento por software, firmware o hardware
  - A su vez, las magnitudes con las que se debía operar usualmente no cabían en ese acotado rango

# Inconvenientes con FXP

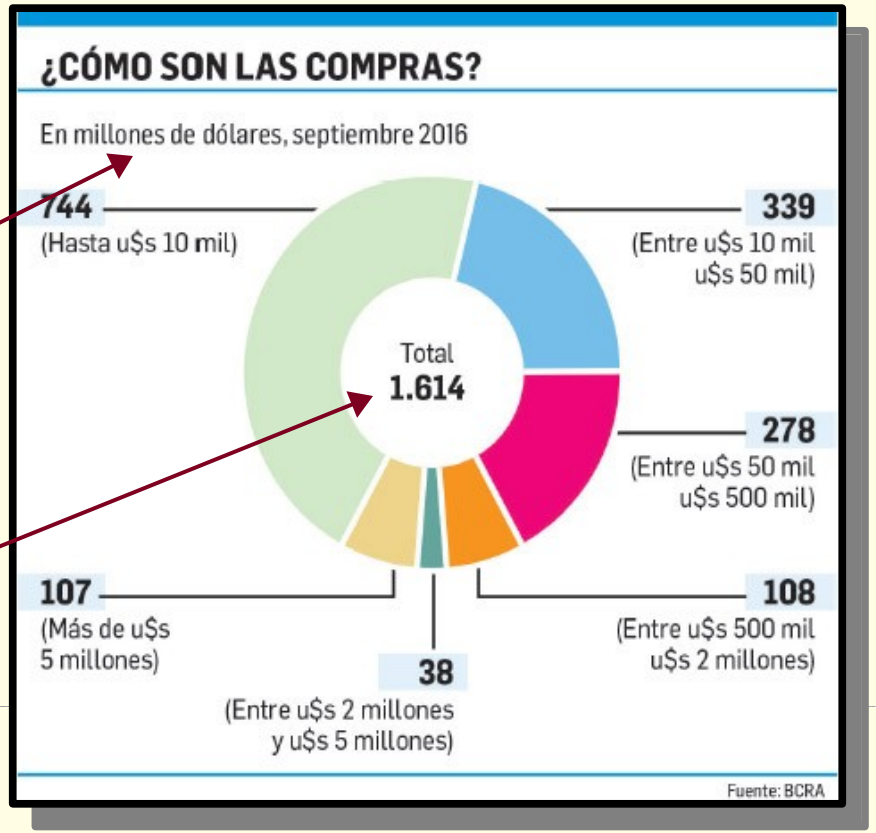
- Continúa:
  - En muchos casos, el número a ser representado debía ser escalado hacia arriba o hacia abajo para poder ser representado
  - Naturalmente, al final del cómputo el resultado debía ser transformado nuevamente al dominio requerido por el usuario del sistema
  - Téngase presente que sin estas transformaciones, el hardware **FXP** produciría resultados carentes sentido (producto de los múltiples overflows)

# Un problema de escalamiento

- Los factores de escalamiento son un recurso habitual para escapar a las limitaciones cuando representamos información

siempre debe estar especificado
el factor de escalamiento en uso

con sólo cuatro dígitos
se logra representar
al número 1.614.000.000



# Un problema de escalamiento

- Para hacer uso de esta técnica, se debe explicitar el factor de escalamiento a utilizar:
  - Todo número en notación **FXP** de $n$ dígitos de precisión en un base $b$ al hacer uso de un factor de escala $b^k$ representará un valor absoluto menor que $b^k$, resultando en un máximo error de $b^{-(n-k)} = b^{k-n}$
  - Como se puede apreciar, el factor de escalamiento también escalará al error
  - Esto se debe a que el intervalo $[-1,+1]$, cuyo máximo error para una precisión $n$ es apenas $b^{-n}$, ahora representa magnitudes del intervalo $[-b^k,+b^k]$

# Un problema de escalamiento

- Esta pérdida de precisión puede ser remediada de diversas formas
- Una posibilidad es hacer uso de aritmética de punto fijo de múltiple precisión
  - Es decir, la idea es usar múltiples palabras para cada magnitud representada
  - Naturalmente, el hacer uso de más de una palabra implica usualmente un mayor costo tanto en tiempo de ejecución como en espacio de almacenamiento

# Un problema de escalamiento

- Para cálculos largos o complicados, este escalamiento y extensión de precisión implica un arduo análisis matemático y cómputo lateral para seguir los factores de escala o controlar las longitudes de las palabras
- Una complicación adicional surge al considerar que sólo se puede usar un único factor de escala sobre un dado conjunto de operandos
  - Nótese que la introducción del escalamiento único acarreará importantes pérdidas de significancia

# Ejemplo

- En 2016 en Mercado Libre figuraba listada una Ferrari F-430 F1 Spyder a **$528.000** dólares
- Supongamos que también quiero comprar un llavero original que cuesta **$39** dólares

# Ejemplo

- Si el hardware sólo puede representar tres dígitos fraccionarios base **10**, ¿qué factor de escalamiento conviene usar en cada caso?
  - Para la Ferrari, “millones de dólares”
  - Para el llavero, “miles de dólares”
- Ahora bien, si quisiera calcular el costo total, ahí se debe usar el mayor factor para representar ambas magnitudes:
  - La Ferrari se representa como **0.528**... ¿y el llavero?

# Un problema de escalamiento

- Retomando:
  - Como vimos, la diferencia actual entre un factor de escala común $b^k$ para un orden de magnitud $b^z$, en un cierto número con algún $z < k$, creará $k - z - 1$ ceros a la izquierda
  - En consecuencia, en vez de contar con $n$ dígitos que aporten significancia sólo se contará con un máximo de $n - (k - z - 1)$ dígitos
  - La pérdida sucesiva de significancia en una secuencia de operaciones desencadena situaciones singulares, que el hardware no estará en condiciones de resolver

# Artimética de punto flotante

- En respuesta a todos estos cuestionamientos, se introdujo la representación de punto flotante en la década del '40
- Una idea brillante fue simplemente permitir que cada magnitud sea acompañada por su propio factor de escala a lo largo de la computación
  - Es decir, las magnitudes preservarán hasta último momento la máxima precisión, ya que utilizarán en todo momento el menor factor de escala posible

# ¿Preguntas?